Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

RM
2022-2023

On se place dans (E,d) un espace métrique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Notion de complétude

1.1 Suites de Cauchy

Définition 1 : Soit (x_n) suite de points de E. On dit que (x_n) est une suite de Cauchy (ou vérifie le critère de Cauchy) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Remarque 2 : Une suite convergente est de Cauchy. Une suite de Cauchy est bornée.

Exemple 3 : Toute suite de Cauchy n'est pas convergente. Par exemple, si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors il existe une suite $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tendant vers α qui est de Cauchy mais qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 4 : Une suite de Cauchy $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ admettant une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

Proposition 5 : Si $f : E \to E'$ est uniformément continue et $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, alors $f(x_n)$ est aussi une suite de Cauchy dans E'.

1.2 Espace complet

Définition 6 : On dit qu'un espace métrique (E,d) est complet si toute suite de Cauchy de E converge.

Remarque 7 : L'avantage est donc que dans les espaces complets, on n'a pas besoin de savoir la limite d'une suite pour prouver quelle converge, mais seulement montrer qu'elle de Cauchy.

Exemple 8 : $(\mathbb{R}, |.|)$,$(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ et $(\mathbb{C}, |.|)$ sont complets. Par contre, on a montrer que $(\mathbb{Q}, |.|)$ n'est pas complet.

Remarque/Exemple 9 : La notion de complétude n'est pas topologique, mais dépends aussi de la distance choisis. Par exemple, si on pose dans $\mathbb{R}$ la distance $d'(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$, alors $|.|$ et d' induisent la même topologie sur $\mathbb{R}$, pourtant $(\mathbb{R}, d')$ n'est pas complet, car la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy sur $(\mathbb{R}, d')$ mais ne converge pas.

Proposition 10 : Toute partie complète d'un espace métrique est fermée et toute partie fermée d'un espace complet est complète.

Proposition 11 : Soient $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$ des espaces métriques. L'espace métrique $E_1 \times ... \times E_n$ est complet (pour la distance produit) si et seulement si pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, l'espace métrique (E_i, d_i) est complet.

Proposition 12 : Soit (E,d) un espace complet et (F_n) une suite décroissante de fermés non vides de E, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$ (où $\delta(F_n)$ est le diamètre). Alors il existe $x \in E$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Proposition 13 : Tout espace métrique compact est complet.

Théorème (Complété d'un espace métrique) 14 : Soit (E,d) un espace métrique. Alors il existe $(\hat{E}, \hat{d})$ un espace métrique complet avec $i : E \to \hat{E}$ une isométrie et $i(E)$ est dense dans $\hat{E}$. On a que $\hat{E}$ est unique à une isométrie bijective près.

Exemple 15 : $\mathbb{R}$ est par exemple le complété de $\mathbb{Q}$.

2 Exemples d'espaces complets

2.1 Espaces de Banach

Définition 16 : On appelle espace de Banach tout espace normé complet.

Exemple 17 : • Pour $p \in [1, +\infty]$, $(\mathbb{K}^n, \|.\|_p)$ est complet avec $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$.
• $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_1)$ n'est pas complet.
• Soit X un ensemble, on note $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-e.v.n des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$ avec $\|f\| = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$. Alors $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Proposition 18 : Tout espace normé de dimension finie est un Banach.

Remarque 19 : Ceci est due au faite que en dimension finie, on à l'équivalence fermé bornée et compact. La proposition 4 permet de conclure à la convergence de la suite de Cauchy grâce aux théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 20 : Si F est un espace de Banach, l'e.v.n $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach.

Remarque 21 : On en déduit que $E' = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$ est un Banach.

Proposition 22 : E est un espace de Banach si et seulement si toute suite absolument convergente est convergente.

Proposition 23 : Soit E un Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|u\| < 1$. Alors $Id - u$ est inversible, son inverse est $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$.

2.2 Espaces L^p

Définition 24 : Pour $p \in [0, +\infty]$, on désigne par $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des applications f de X dans $\mathbb{C}$ mesurables telles que $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$. On pose $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.
On note $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des fonctions $f : E \to \mathbb{C}$ mesurable telles que $\|f\|_\infty = \inf\{M : \mu(\{|f| > M\}) = 0\} < +\infty$.

Proposition 25 : Pour $p \in [1, +\infty]$, $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel.

Théorème (Inégalité de Hölder) 26 : Soient $p \in [1, +\infty]$ et q sont conjugué, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$,$g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Alors $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Remarque 27 : Lorsque $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder est dans ce cas connue sous le nom d'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème (Inégalité de Minkowski) 28 : Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Alors

$$\|f + g\| \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Proposition 29 : Soit $p \in [1, +\infty]$. On pose sur $\mathcal{L}^p(\mu)$ la relation d'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad \mu - p.p.$ On pose alors $L^p(\mu) = \mathcal{L}(\mu)/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalences.

Remarque 30 : Il faut attention au fait que l'on note abusivement de la même manière f dans $\mathcal{L}^p$ et L^p.

Corollaire 31 : Grâce à l'inégalité de Minkowski, on en déduit que $L^p(\mu)$ est un espace vectoriel normé pour $\|.\|_p$.

Théorème (de Riesz-Fisher) 32 : Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach (complet pour la norme $\|.\|_p$). De plus, tout suite qui converge dans L^p admet une sous suite qui converge μ-p.p.

Dev 1

2.3 Espaces de Hilbert

Définition 33 : Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme issue du produit scalaire.

Exemple 34 : Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert. L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert car la norme $\|.\|_2$ dans L^2 est la norme associé au produit scalaire usuel.

Développement 35 : Soit $\mathcal{C}$ un convexe fermé (non vide) de H un espace de Hilbert. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique élément $y \in \mathcal{C}$, tel que $d(x, \mathcal{C}) = \inf_{z \in \mathcal{C}} \|x - z\| = \|x - y\|$ et on appelle le point $y = p_{\mathcal{C}}(x)$ le projeté orthogonale de x sur $\mathcal{C}$. On a ainsi

$$\forall z \in \mathcal{C}, \qquad \|x - p_{\mathcal{C}}(x)\| \leq \|x - z\|.$$

Il vérifie les propriétés suivante :
- $\forall z \in \mathcal{C}$, $Re\langle p_{\mathcal{C}}(x) - x, p_{\mathcal{C}}(x) - z\rangle \leq 0$.
- l'application p est 1-lip.

Application (Théorème de représentation de Riesz) 36 : Soit f une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique vecteur $a \in H$ tel que, pour tout x de H, $f(x) = \langle a, x\rangle$.

Dev 2

Théorème 37 : Si F est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H, alors l'application $p_F : H \to F$ est une application linéaire continue, et $p_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Théorème 38 : Si H est un espace de Hilbert, alors, pour tout sous-espace vectoriel fermé F, on a $H = F \bigoplus F^\perp$ et la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ associé est p_F. Elle est donc continue. On dit que p_F est la projection orthogonale sur F.

Corollaire 39 : Soit H un espace de Hilbert, et F un sous-espace vectoriel de H. Alors F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Application 40 : L'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 41 : On appelle opérateur sur H toute application linéaire continue $T : H \to H$.

Proposition 42 : Soit H un espace de Hilbert. Pour tout opérateur T de H, il existe un autre opérateur, noté T^*, et appelé l'adjoint de T, tel que pour tout x, y de

H, $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$. De plus, $\|T\| = \|T^*\|$.

Remarque 43 : Cela se déduit du théorème de représentation de Riesz.

3 Utilisation de la complétude

3.1 Prolongements d'applications

Théorème (de prolongement) 44 : Soit A une partie dense d'un espace métrique X, Y un espace métrique complet, $f : A \to$ uniformément continue. Alors

- Il existe une unique application continue $g : X \to Y$, prolongeant f.
- g est uniformément continue.

Définition 45 : On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant les deux propriétés suivantes

i) f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

ii) f et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide. Autrement dit pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0.$$

Exemple 46 : La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposition 47 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E, F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Alors f est continue si et seulement si f est uniformément continue.

Application (Théorème de Plancherel) 48 : Avec la convention de transformée de Fourier $e^{-ix\xi}$, L'application

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{P} : & \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f) \end{array}$$

possède un unique prolongement continue à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et ce prolongement est un isomorphisme isométrique.

3.2 Théorèmes de points fixe

Définition 49 : Soit X,Y deux espaces métriques et $k \in [0,1[$. On dit que $f : X \to Y$ est k-contractante si $d(f(u), f(v)) \leq kd(u,v)$ pour tout $u, v \in X$. On dit aussi que f est contractante.

Théorème (de picard) 50 : Soit $f : X \to X$ une application k-contractante où X un espace métrique complet. Alors

- f possède un unique point fixe a.
- Pour tout $x_0 \in X$, (x_n) définie par x_0 et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a. De plus, on a $d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$.

Remarque 51 : Les trois hypothèses du théorème sont essentielles. En effet,

- $f(x) = x/2$ est une $1/2$-contraction de $X =]0,1]$ dans lui même, mais n'a pas de point fixe car X n'est pas complet.
- $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $|f(u) - f(v)| < |u - v|$ si $u \neq v$, mais n'a pas de point fixe dans $\mathbb{R}$ car f n'est pas contractante.
- $f(x) = x/2 + 1$ est $1/2$-contractante sur $X = [0,1]$, mais n'a pas de point fixe dans X car f ne va pas de X dans X.

Corollaire (Picard bis) 52 : Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ ayant une itérée f^p contractante. Alors f possède un unique point fixe a et pour tout $x_0 \in X$, la suite (x_n) définie par x_0 et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a.

3.3 Théorèmes de Baire (Optionnel car un peu long)

Théorème (de Baire V1) 53 : Dans un espace métrique complet X, la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieurs vide est encore d'intérieur vide, ie si $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fermé dénombrable de X, alors si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n$ a un point intérieur ($\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$), alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{\phi}_N \neq \emptyset$.

Théorème (de Baire V2) 54 : Si X est un espace métrique complet, l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses est encore dense dans X.

Application 55 : Tout espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base algébrique dénombrable.

Théorème (Banach-Steinhaus) 56 : Soit E et F deux espace de Banach et soit $T_i : E \to F$ des applications linéaires continues ($i \in I$, ensemble d'indices quelconque) telle que pour tout $x \in E$, $C_x = \sup_{i\in I}\|T_i(x)\| < +\infty$. Alors $C = \sup_{i\in I}\|T_i\| < +\infty$.

Application 57 : Il existe des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ qui sont intégrables, mais dont la série de Fourrier ne converge pas pour la norme $\|.\|_1$.

Théorème (de l'application ouverte) 58 : Soit E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire continue surjective. Alors il existe $c > 0$ tel que $B_F(0,c) \subseteq T[B_E(0,1)]$. En conséquence T est une application ouverte.

Théorème (isomorphisme de Banach) 59 : Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue bijective. Alors T^{-1} est automatiquement continue; T est un isomorphisme.

Théorème (du graphe fermé) 60 : Soit $T : E \to F$ une application linéaire. S i le graphe de T $G_T = \{(x, T(x)) \in E \times F; x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$, alors F est continue.

Références :

1. Analyse Gourdon
2. Topologie Queffélec
3. Mesures,Convolution ... El haj laamri
4. Cours d'analyse fonctionnelle Li
5. Objectif agrégation Beck
6. isenmann (rip)